Mathematik: Funktionentheorie

Aufgabenblatt 1

Dr. J. Brödel

HU Berlin, SS 2020
Ausgabe: 29.4.2020
Abgabe: 11.5.2020

Die Lösungen der Aufgabenblätter können bis zum Ende des Abgabetages via Moodle abgegeben werden. Bitte erzeugen Sie eine gut les- und druckbare .pdf-Datei (A4-Format, gut ausgeleuchtet), deren Namen Sie nach dem Muster `Datum_Blatt_FT_Name_Matrikelnummer.pdf` *vergeben.*

Beispiel: `200511_A01_FT_AdrianLeverkuehn_271828.pdf`

Auf diesem Aufgabenblatt finden Sie eine zusätzliche Definition, die Sie zur Lösung benötigen. Das darin beschriebene Konzept komplexer Differenzierbarkeit/Holomorphie und die damit verbundenen Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen werden allerdings erst in der Vorlesung am 6. Mai 2020 behandelt werden. Aus diesem Grunde haben Sie bis zum 11. Mai 2020 Zeit, Ihre Aufgaben abzugeben.

---

1. Stereographische Projektion

In der Vorlesung wurde die stereographische Projektion behandelt. Im Rahmen dieser Aufgabe können Sie einige ihrer Eigenschaften erkunden.

a) Gegeben sei ein Punkt M auf der Riemannschen Zahlenkugel mit Bild $z \in \mathbb{C} \cup \infty$. Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion den Antipoden zu M (das ist der M diametral gegenüberliegende Punkt) gerade auf $-1/\overline{z}$ abbildet.

b) Zeigen Sie, dass jeder Großkreis auf der Riemannschen Zahlenkugel auf eine Kreislinie der Form

$$\alpha(z\overline{z} - 1) + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} = 0$$

abgebildet wird und drücken Sie α und β durch die in der Vorlesung eingeführten Größen $A, B, \ldots$ aus!

c) Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion eine winkelerhaltende Abbildung ist. Betrachten Sie der Einfachheit halber eine Gerade in der komplexen Zahlenebene, die die reelle Achse in einem Punkt $p \in \mathbb{R}$ unter dem Winkel ϑ schneidet. Parametrisieren Sie diese Linien mittels

$$z = p + t \quad \text{und} \quad z = p + t\, e^{i\vartheta}\,,$$

bilden Sie sie auf die Zahlenkugel ab und berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Tangentialvektoren. (Benutzen Sie die Eulersche Formel $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$.)

2. Komplexe Differenzierbarkeit

Definition: Eine Funktion $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z = x + iy) = u + iv$ heißt in einem Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ ***komplex differenzierbar*** oder ***holomorph***, wenn u und v in z_0 stetige Funktionen von x und y sind und in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$
$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

gelten (Notation: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$).

Betrachten Sie die folgenden Funktionen $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ sowie $a, b \in \mathbb{C}$ und geben Sie jeweils die Punktmengen an, auf denen diese komplex differenzierbar sind:

a) $f(z) = xy + \frac{i}{2}(y^2 - x^2 + 5)$

b) $f(z) = e^y - i\, e^x$

c) $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$

d) $f(z) = \overline{z}$

e) $f(z) = f(x + iy) = a\,x + b\,y\,.$

f) Bestimmen Sie für die gegebene Funktion $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$u(z) = u(x + iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

alle Funktionen $v(z)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ so dass $u + iv$ holomorph ist.

3. Komplexe Abbildung

Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in ihrem Definitionsbereich holomorph ist. In welchen Punkten verschwindet die Ableitung von f?

b) Sei $\mathcal{E} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ injektiv ist. Beschreiben Sie das Bild dieser Abbildung!

c) Zeigen Sie, dass auch die Einschränkung der Funktion f auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{E}}$ injektiv ist. Hier bezeichnet $\overline{\mathcal{E}}$ den Abschluß der offenen Einheitskreisscheibe.

d) Beschreiben Sie das Bild eines Kreises $K_r := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = r\}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

e) Beschreiben Sie das Bild eines Strahls $S_\varphi := \{z \in \mathbb{C}\colon z = re^{i\varphi} \text{ mit } r > 0\}$ in Abhängigkeit vom Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

4. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Sei

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2; \mathbb{R})\,.$$

a) Sei $+$ die Matrixaddition und $\cdot$ die skalare Multiplikation mit reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M} = 2$ ist. Finden Sie eine Basis in diesem Vektorraum!

b) Sei $+$ wieder die Matrixaddition, aber $\cdot$ nun die Matrixmultiplikation. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}, \qquad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto x + iy$$

ein Körperisomorphismus ist!