Mathematik: Funktionentheorie

Aufgabenblatt 6

Dr. J. Brödel

HU Berlin, SS 2020

Ausgabe: 8.7.2020

Abgabe: 15.7.2020

Im Rahmen dieses letzten Aufgabenblattes zur Vorlesung Funktionentheorie sollen Sie sich mit speziellen Funktionen beschäftigen. Teile der Inhalte dieses Blattes werden erst in der letzten Vorlesung über elliptische Funktionen am 15.7. behandelt werden. In diesem Sinne mögen Sie insbesondere die letzte Aufgabe als Einladung zur Vorbereitung für die Vorlesung über elliptische Funktionen verstehen. Lediglich die ersten drei Aufgaben zählen als „Hausaufgaben".

---

1. Residuum eines Quotienten zweier Funktionen

Seien g und h in $U_\varepsilon(z_0)$ holomorphe Funktionen mit $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

2. Eulersche B-Funktion

Für zwei Variable $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Re}(w) > 0$ ist die Eulersche Betafunktion über

$$\mathrm{B}(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,\mathrm{d}t$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass B als Funktion beider Variabler stetig ist und dass für festes z die Abbildung $w \mapsto \mathrm{B}(z,w)$ analytisch in der offenen rechten Halbebene ist. Gilt dies auch für festes w und die Abbildung $z \mapsto \mathrm{B}(z,w)$?

b) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten:

$$\mathrm{B}(z+1,w) = \frac{z}{z+w}\,\mathrm{B}(z,w) \quad \text{und} \quad \mathrm{B}(1,w) = \frac{1}{w}\,.$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) := \frac{\mathrm{B}(z,w)\,\Gamma(z+w)}{\Gamma(w)}$$

sowohl die Funktionalgleichung der Γ-Funktion als auch $f(1) = 1$ erfüllt. Die beiden Bedingungen (Funktionalgleichung und Wert bei $z = 1$) genügen allerdings nicht, um die Γ-Funktion eindeutig festzulegen, man benötigt überdies noch die Bedingung, dass $x \mapsto \log f(x)$ eine konvexe Funktion für $x \in \mathbb{R}^+$ ist ($\nearrow$ Satz von Bohr-Mollerup). Tatsächlich läßt sich aber die B-Funktion auf die Γ-Funktion mittels

$$\mathrm{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

zurückführen.

$\Longrightarrow$

3. Volumen der Einheitskugel

Zeigen Sie, dass sich das Volumen der Einheitskugel in n Dimensionen über die Relation

$$\mu_n = 2\,\mu_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

zu

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

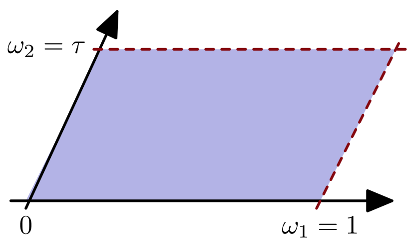
berechnen läßt.

4. Elliptisches Gitter

Eine elliptische Kurve kann in der sogenannten *Torusformulierung* als

$$\mathbb{C} \setminus \Lambda, \quad \Lambda = \{z\colon z = n + m\tau = n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

beschrieben werden. Hierbei ist Λ ein Gitter, dessen Form durch einen komplexen Parameter $\tau \in \mathbb{H}$ beschrieben wird. Hier ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene.



Der Parameter τ ergibt sich als Quotient der beiden komplexen *Perioden* ω_2 und ω_1 des Gitters, wobei für diese Aufgabe $\omega_1 = 1$ und somit $\tau = \omega_2$ gewählt werden sollen. Das durch die Punkte $\{0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2\}$ beschriebene Parallelogramm nennt man das *fundamentale Gebiet* (auch: Grundmasche, Grundgebiet) der elliptischen Kurve.

In der *Weierstraßschen Formulierung* werden elliptische Kurven allerdings algebraisch beschrieben: man definiert zwei Variable $x, y \in \mathbb{C}$, die über die Relation

$$y^2 = 4x^3 - g_2\,x - g_3 \tag{$*$}$$

verknüpft sind. Die Geometrie der elliptischen Kurve, also die jeweilige Form des Fundamentalgebietes, wird durch die Parameter $g_2(\omega_1, \omega_2)$ und $g_3(\omega_1, \omega_2)$ beschrieben.

Natürlich lassen sich die beiden Formulierungen aufeinander abbilden. Der Schlüssel hierzu ist die Weierstraßsche $\wp$-Funktion und deren Ableitung

$$\wp(z,\Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z-(n+m\tau))^2} - \frac{1}{(n+m\tau)^2} \right)$$

$$\wp'(z,\Lambda) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z-(n+m\tau))^3} \right),$$

die als Summe einer Funktion über unendlich viele Gitterpunkte (mit Ausnahme des Ursprungs) definiert sind.

Die Gitterkonstanten g_2 und g_3 sind ebenfalls über eine Gittersumme definiert:

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(n+m\tau)^4}, \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(n+m\tau)^6}.$$

Diese Objekte sind (bis auf die Skalierung) sogenannte *Eisensteinreihen* $G_{2k}(\tau)$, die in der oberen Halbebene für $k \geq 2$ holomorph sind (↗ `Wikipedia`).

a) Zeigen Sie mit Hilfe von `Mathematica` am Beispiel $\tau = 0.6i$, dass Glchg. $(*)$ erfüllt ist, wenn man

$$z \mapsto [x, y] = [\wp(z), \wp'(z)]$$

setzt. Berechnen Sie hierzu zunächst die Konstanten g_2 und g_3 als Gittersummen. Die Reihen konvergieren recht schnell, es genügt ein (symmetrisches) Gitter der Größe 41×41. Wählen Sie danach einige beliebige Werte z aus dem Fundamentalgebiet und überprüfen Sie für diese die Gültigkeit von Glchg. $(*)$.

b) Wiederholen Sie die Berechnungen aus der vorherigen Teilaufgabe, benutzen Sie aber diesmal die von Mathematica bereitgestellten Funktionen

```
In[1]:=  {g2,g3} = WeierstrassInvariants[{om1/2,om2/2}];
```

sowie die Funktionen `WeierstrassP` und `WeierstrassPPrime`.

c) Zeichnen Sie die elliptische Kurve, die durch $\tau = 0.6i$ definiert wird in einem (x, y)-Koordinatensystem im Rechteck $-30 < x < 30$, $-120 < y < 120$. Die rein imaginäre Wahl von τ führt zu reellen Gitterkonstanten, somit ist auch y reell. Beachten Sie jedoch die beiden Zweige der Wurzel, wenn Sie nach y auflösen.