

Die Lösungen der Aufgabenblätter können bis zum Ende des Abgabetermins via Moodle abgegeben werden. Bitte erzeugen Sie eine gut les- und druckbare .pdf-Datei (A4-Format, gut ausgeleuchtet), deren Namen Sie nach dem Muster Datum_Blatt_FT_Name.Matrikelnummer.pdf vergeben.

Beispiel: 200525_A01_FT_AdrianLeverkuehn_271828.pdf

Auch auf diesem Aufgabenblatt findet sich ein Konzept, das wir erst in der Vorlesung am 20.5.2020 wiederholen werden: allerdings sollten Sie Wegintegrale bereits in Ihrer Analysis-Vorlesung kennengelernt haben. Im Hinblick darauf haben Sie jedoch bis zum 25.5.2020 Zeit, das Aufgabenblatt abzugeben.

1. Möbiustransformation

Gegeben sei für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ die Abbildung ($\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

$$M: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diese Abbildungen heißen **Möbiustransformation**. Offensichtlich sind zwei durch die Parametersätze $\{a, b, c, d\}$ und $\{e, f, g, h\}$ bestimmte Möbiustransformationen genau dann äquivalent, wenn

$$r \cdot \{a, b, c, d\} = \{ra, rb, rc, rd\} = \{e, f, g, h\} \text{ für ein } r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Als Repräsentanten der so entstehenden Äquivalenzklassen wählt man üblicherweise diejenigen Parametersätze $\{a, b, c, d\}$, für die $ad - bc = 1$ und nennt die Menge der durch diese Repräsentanten definierten Abbildungen \mathcal{M} , die Menge der Möbiustransformationen.

Weiterhin sei eine Abbildung

$$\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M$$

definiert. Der Definitionsbereich der Abbildung φ ist die Gruppe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$: dies ist die Gruppe der (2×2) -Matrizen mit Einheitsdeterminante über \mathbb{C} . Aus der Determinanteneigenschaft folgt sofort die Regularität der Matrizen.

Hinweis: die folgenden Teilaufgaben können ausgesprochen rechenintensiv werden. Allerdings lassen sie sich auch mit vergleichsweise geringem Aufwand lösen. Finden Sie also – neben (oder mit) der Lösung der inhaltlichen Fragestellungen – gleichzeitig auch eine gute Schreibweise, die einen effizienten Rechenweg ermöglicht.

- Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{M} aller Möbiustransformationen eine Gruppe ist. Die Gruppenverknüpfung ist hierbei die Hintereinanderausführung der Abbildungen. Geben Sie die inverse Abbildung explizit an!
- Zeigen Sie, dass die Abbildung φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Welchen Kern hat die Abbildung φ ?
- Zeigen Sie, dass eine generische Möbiustransformation zwei Fixpunkte besitzt! Für welche Parameterkonfigurationen $\{a, b, c, d\}$ gibt es einen, unendlich viele oder gar keinen Fixpunkt?

Das Doppelverhältnis vier verschiedener komplexer Zahlen ist definiert als

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

d) Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation das Doppelverhältnis nicht ändert, d.h.

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(w_1, w_2, w_3, w_4) \text{ für } w_j = M(z_j).$$

e) Eine Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ heißt *verallgemeinerte Kreislinie*, falls sie entweder eine Kreislinie in \mathbb{C} oder (nicht notwendig Ursprungs-) Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞ ist. Zeigen Sie, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreislinien auf ebensolche abbilden.

f) Beweisen Sie, dass vier Punkte in der Ebene genau dann auf einem Kreis oder auf einer Geraden liegen, wenn das Doppelverhältnis reell ist. Wie verhält sich das Doppelverhältnis unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_4 , also unter Vertauschungen der Rollen der einzelnen z_i ?

g) Seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel jeweils verschiedener Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Möbiustransformation gibt, so dass $M(z_j) = w_j$.

h) Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen konform und orientierungserhaltend sind!

2. Wegintegrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale entlang der angegebenen Wege:

- $\int_{\gamma} |z| dz$ entlang eines geradelinigen Weges von $-i$ nach i .
- $\int_{\gamma} |z| dz$ entlang des Randes der Einheitskreisscheibe von $-i$ nach i .
- $\int_{\gamma} \bar{z}^3 dz$ entlang von $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.
- $\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2+4)^2} dz$ für jeden Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$ von z_1 nach z_2 .
- $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz$ entlang von $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

3. Konstanz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $f^*: U^* \rightarrow \mathbb{C}$, $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ebenfalls holomorph ist und bestimmen Sie deren Ableitung in $z \in U^*$.
- Nehmen Sie nun an, dass U ein Gebiet ist. Beweisen Sie, dass f , falls es nur reelle oder nur imaginäre Werte annimmt, konstant ist.