Mathematik: Funktionentheorie HU Berlin, SS 2020
Aufgabenblatt 4 Ausgabe: 10.6.2020
Dr. J. Brödel Abgabe: 19.6.2020

Im Rahmen dieses Aufgabenblattes sollen Sie sich mit dem Computer-Algebra-System `Mathematica` beschäftigen und sich einige Werkzeuge für die Behandlung und Darstellung komplexer Funktionen erarbeiten. Als Teil Ihrer Lösung können Sie gerne den (elektronischen) Ausdruck (als .pdf) eines Mathematica-Notebooks abgeben.

Mathematica: Grundlagen

Nachdem man Mathematica gestartet und ein neues Notebook geöffnet hat, können Kommandos eingegeben werden. Mehrere Kommandos werden durch ein Semikolon getrennt, das gleichzeitig bestimmt, ob das Ergebnis einer Funktion oder Zuweisung ausgegeben wird:

```
a = 3+5; b = Log[2]; a + b
```

Wenn man Mathematica mit Hilfe von **Shift+Enter** anweist, die Befehle auszuführen, erhält man

```
 In[1]:=  a = 3+5; b = Log[2]; a + b
Out[1] =  8 + Log[2]
```

als auch die Ausgabemarkierung `Out[1] =` automatisch hinzufügt; diese müssen also *nicht* mit eingegeben werden. Hilfe zu jeder Funktion erhält man mittels

```
 In[2]:=  ? Simplify
          Simplify[expr] performs a sequence of algebraic and other transformations
 ↪ on expr and returns the simplest form it finds.
```

Grundsätzliche Arithmetik sowie die grundlegenden Funktionen funktionieren genau wie erwartet. Multiplikation kann durch ein Leerzeichen ersetzt werden. Funktionen, die nur ein Argument erwarten, wie zum Beispiel `Simplify[]` und `Expand[]`, können auch mit Hilfe von `//` auf einen Ausdruck angewendet werden:

```
 In[3]:=  a = 3+5
          b = Log[2]
          b + Log[4] - Log[a]
          Simplify[b + Log[4] - Log[a]]
          Log[2]+Log[4] - Log[a] // Simplify
          Exp[a] Exp[b] // Simplify
          (c + d)^4 // Expand
Out[3] =  8
Out[4] =  Log[2]
Out[5] =  Log[2] + Log[4] - Log[8]
Out[6] =  0
Out[7] =  0
Out[8] =  2 Exp[8]
Out[9] =  c^4 + 4 c^3 d + 6 c^2 d^2 + 4 c d^3 + d^4
```

Ausdrücke, können mit Hilfe der Kommandos `Expand[]`, `Simplify[]`, `FullSimplify[]`, `Factor[]`, `Together[]`, `Apart[]`, `ExpToTrig[]`, `TrigToExp[]` in eine passende algebraische Form gebracht werden.

```
 In[10]:= Cos[x] + I Sin [x] // FullSimplify
          a/8 + b/4
          a/8 + b/4 // Together
          % // Apart
          (x - a1) (x - a2) (x - a3) // Expand
          % // Factor
          Log[z + Sqrt[z^2 + 1]] // ExpToTrig
Out[10] = Exp[I x]
Out[11] = 1 + Log[2]/4
Out[12] = 1/4 (4 + Log[2])
Out[13] = 1 + Log[2]/4
Out[14] = -a1 a2 a3 + a1 a2 x + a1 a3 x + a2 a3 x - a1 x^2 - a2 x^2 - a3 x^2 + x^3
Out[15] = - (a1 - x) (a2 - x) (a3 - x)
Out[16] = ArcSinh[z]
```

Jedes Objekt in Mathematica wird intern als Liste dargestellt. Auf die interne Darstellung kann man mit dem Kommando `FullForm[]` zugreifen. Jede Liste hat einen Kopf (`Head[]`), der angibt, welcher Natur die gelisteten Objekte sind oder was mit ihnen geschehen soll:

```
In [17]:= FullForm[(c+d)^2]
Out[17] = Power[Plus[c, d], 2]
In [18]:= Head[c+d]
Out[18] = Plus
```

Listen können mit `Join[]` verknüpft werden und auf einzelne Elemente kann man direkt zugreifen:

```
In [19]:= lst = {a, b, 3, Exp[I Pi]}
Out[19] = {8, Log[2], 3, -1}
In [20]:= Head[lst]
Out[20] = List
In [21]:= Exp[lst[[2]]]
Out[21] = 2
```

Für komplexe Zahlen gibt es einige grundsätzliche Funktionen:

```
In [22]:= z = 1/2 - 0.3 I
          Re[z]
          Im[z]
          {Re[z],Im[z]}
          ReIm[z]
          Complex[1/2, -0.3]
Out[22] = 0.5 - 0.3 I
Out[23] = 0.5
Out[24] = -0.3
Out[25] = {0.5, -0.3}
Out[26] = {0.5, -0.3}
Out[27] = 0.5 - 0.3 I
```

Letztendlich gibt es zahlreiche Möglichkeiten Funktionen zu zeichnen. Die wichtigsten Kommandos sind `Plot[]`, `ListPlot[]`, `ParametricPlot[]`, `Plot3D[]` and `ContourPlot[]`. Probieren Sie die folgenden Befehle aus, zerlegen Sie sie in ihre Bestandteile und versuchen Sie zu verstehen, was – Schritt für Schritt – geschieht:

```
In [28]:= Plot[Sin[x^2]]
In [29]:= ParametricPlot[{x, Sin[x^2]}, {x, 0, 5}, AspectRatio -> 1/GoldenRatio]
In [30]:= ParametricPlot[ReIm[Exp[I w]], {w, 0, 2 Pi}, AspectRatio -> 1]
In [31]:= lst = Table[{Cos[2 Pi t /100], Sin[2 Pi t / 100]}, {t, 0, 99}];
          ListPlot[lst, AspectRatio -> 1]
In [32]:= Plot3D[Abs[Gamma[x+I y]], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotRange -> {0, 4},
↪  ColorFunction -> (Hue@Mod[Arg@(Gamma[x+I y] /. x -> #1 /. y -> #2)/(2 \[Pi]) +
↪  1, 1] &), ColorFunctionScaling -> False]
```

Die letzten Befehle benutzen etwas fortgeschrittenere Konzepte und Schreibweisen und sollen als Einladung verstanden werden, herauszufinden welche Funktionen und deren Kurzformen verwendet werden, um die gewünschten Bilder zu erhalten.

1. Lineare Abbildungen

Betrachten Sie die folgenden Funktionen aus den Beispielen in Kapitel 5 der Vorlesung und zeichnen Sie mit Hilfe von Mathematica sowohl ein geeignetes Netz achsenparalleler Linien als auch deren Bild unter den Abbildungen! Überprüfen Sie anhand der Bilder die Holomorphizität der Abbildungen! Hinweis: eine achsenparallele Linie läßt sich mittels:

```
In [33]:= ParametricPlot[{x, 1}, {x, -Pi, Pi}, PlotRange -> {{-Pi, Pi}, {-Pi, Pi}},
↪  AspectRatio -> 1, Frame -> True, PlotStyle -> Blue]
```

zeichnen.

a)

$$f(z) = \zeta = e^{i\tau}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \qquad \tau \in \mathbb{R}, \mathrm{Im}(\beta) > 0$$

b)

$$f(z) = \zeta = e^{i\tau}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1} \text{ für } |\alpha| < 1.$$

2. Innen und Außen

Zeigen Sie (analytisch) die Gültigkeit der folgenden Formel durch geschickte Einführung des Punktes c in den Integranden:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(c)} \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |z-c| < r \\ 0 & \text{wenn } |z-c| > r \end{cases}.$$

Zeigen Sie weiterhin anhand zweier nichttrivialer Beispiele und einer numerischen Berechnung des Integrals in Mathematica, dass die Identität in der Tat korrekt ist. Der Befehl zur numerischen Integration lautet `NIntegrate[]`.

$\Longrightarrow$

3. Identität

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Zeigen Sie, dass dann für $r > \max\{|z_1|, |z_2|\}$

$$\int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \,\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

Was geschieht im Limes $z_2 \to z_1$?

4. Cauchysche Integralformel

a) Benutzen Sie die Cauchysche Integralformel, um das Integral

$$\oint_{\partial B_1(0)} \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

für $n \in \mathbb{N}^+$ zu berechnen. (Hinweis: $\partial B_r(z)$ bezeichnet den Rand ∂B der Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $z \in \mathbb{C}$. Handelt es sich um die Kreisscheibe (oder deren Rand) um den Ursprung, dann wird oft auch das Argument (0) weggelassen.)

b) Lösen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin^n z \,\mathrm{d}z\,.$$