1. Exponiertes Exponential

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\partial B_2} e^{e^{\frac{1}{z}}} \text{ und } \int_{\partial B_1} \frac{1}{\sin^3 z}.$$

2. Laurent-Koeffizienten

- a) Die Laurent-Entwicklung der Funktion $f(z) = \cot(\pi z)$ auf dem durch ∂B_1 und ∂B_2 begrenzten Kreisring sei durch

$$\cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

gegeben. Berechnen Sie die Laurentkoeffizienten a_n für alle $n < 0$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\text{Res}_a(f(z)/g(z)) = f(a)/g'(a)$ falls $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$.

- b) Berechnen Sie für $n = 0, 1, 2, \dots$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r_n}} \frac{dz}{z^3 \sin z}.$$

wobei $r_n = (n + 1/2)\pi$.

3. Nullstellenmenge

- a) Geben Sie die Nullstellenmenge der folgenden Funktion an:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right),$$

wobei der Funktionswert bei $x = 0$ durch stetige Fortsetzung bestimmt sei.

- b) Betrachten Sie die analytische Fortsetzung der Funktion nach $\mathbb{C}$. Warum ist dies kein Gegenbeispiel zum Satz über die Isoliertheit der Nullstellen holomorpher Funktionen?
c) Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstellen der holomorphen Funktion.

4. Doppelte Periodizität

Zeigen Sie, dass eine doppelt periodische meromorphe Funktion

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z) \text{ mit } \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ und } \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \mathbb{R}$$

in ihrem Fundamentalbereich $\{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in \mathbb{C}: 0 \leq a_i < 1\}$ genauso viele Nullstellen wie Polstellen hat (gezählt mit Multiplizität).