Mathematik: Funktionentheorie

HU Berlin, SS 2020

Vorbereitungsblatt

Ausgabe: 22.4.2020

Dr. J. Brödel

Abgabe: nicht nötig

Dieses Blatt dient dazu, sich das Rechnen mit komplexen Zahlen in Erinnerung zu rufen und eine Vorstellung ebendieser in der komplexen Zahlenebene zu entwickeln. Dieses Vorbereitungsblatt soll nicht abgegeben werden, die Lösungen allerdings werden in der Übung am 29.4.2020 diskutiert werden.

1. Komplexe Zahlen

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen und zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene!

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\sum\limits_{k=0}^{7}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k$

c) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$

d) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{204}$

e) $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}$

2. Teilmengen

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen $A_k \subset \mathbb{C}$:

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 3 < |z| < 10\}$

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| + |z+i| < 4\}$

c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z^2) > 0\}$

d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 \,|\, \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) \leq 2\}$

e) $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = \mathrm{Re}(z)\}$

f) $A_6 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z\overline{z} + z - 3\overline{z} + 1 = 0\}$

Welche der Mengen sind offen und welche abgeschlossen? Welche der Mengen sind beschränkt und/oder kompakt?

3. Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^5 = 4 - 4i$

b) $\cos(z) = 2020$

$\Longrightarrow$

4. Einheitskreis

a) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Finden Sie eine geometrische Konstruktion für diese Abbildung in der komplexen Ebene! Was geschieht durch die Abbildung anschaulich?

b) Gegeben sei eine weitere Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{\overline{z}} \end{aligned}$$

Verdeutlichen Sie sich geometrisch, warum diese Abbildung „Inversion an der Einheitskreislinie“ genannt wird! Welche Fixpunkte ($g(z) = z$) besitzt die Abbildung g?

5. Obere Halbebene

Die *obere Halbebene* ist die Menge aller komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil:

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{H} \Leftrightarrow -1/z \in \mathbb{H}$!

In der folgenden Vorlesung am 29. April 2020 wird es um Reihen, Folgen, (gleichmäßige) Konvergenzen, Potenzreihen und Konvergenzradien gehen: es empfiehlt sich, sich zum besseren Verständnis die entsprechenden Kapitel aus Ihrer Vorlesung Analysis I in Erinnerung zu rufen.