Mathematik: Funktionentheorie HU Berlin, SS 2020
Aufgabenblatt 3 Ausgabe: 27.5.2020
Dr. J. Brödel Abgabe: 5.6.2020

1. Weg- und streckenzusammenhängend

Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, die wegzusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass diese Teilmenge dann auch streckenzusammenhängend ist, dass es also für alle Punkte $x, y \in \Sigma$ einen Streckenzug gibt, der die Punkte x und y verbindet und vollständig in Σ liegt.

2. Rechteck

Sei $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Sei $\mathscr{C}$ das von den Punkten 0 und $a + 2\pi i$ aufgespannte Rechteck mit achsenparallelen Seiten in der komplexen Ebene. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\mathscr{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

explizit entlang des Rechtecks und verifizieren Sie die Gültigkeit der Cauchyschen Integralsatzes.

3. Abschätzung

Sei γ der Weg, der den Halbkreis von -1 bis 1 in der oberen Halbebene beschreibe. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z \right| \leq \pi e\,.$$

4. Wegintegrale

Berechnen Sie:

a) $\int_{\partial B_1} \frac{\cos(\pi z)}{z}\,\mathrm{d}z$ **b)** $\int_{\partial B_3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z$ **c)** $\int_{\partial B_3} \frac{e^z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$ **d)** $\int_{\partial B_1} \frac{z^3}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$

$\Longrightarrow$

5. Fresnelsche Integrale

Gegeben sei $b \in \mathbb{R}^+$, und die Wege $\gamma_i \colon [0, b] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma_1 \colon t \mapsto t, \quad \gamma_2 \colon t \mapsto b + it, \quad \gamma_3 \colon t \mapsto t(1+i)\,.$$

a) Betrachten Sie die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$, und zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Das entstehende Integral ist gerade eine Darstellung der Fehlerfunktion Erf. Benutzen Sie – über die analytischen Betrachtungen hinaus – eine numerische Implementation dieser Funktion (z.B. in `Mathematica`), um sich von der Gültigkeit der obigen Gleichung zu überzeugen.

b) Benutzen Sie eine geeignete Abschätzung, um zu zeigen, dass

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{b \to \infty} 0\,.$$

c) Betrachten Sie den Grenzübergang aus Aufgabenteil b) sowie die Identität $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1/2\sqrt{\pi}$ um die *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen.